



bölüm 4

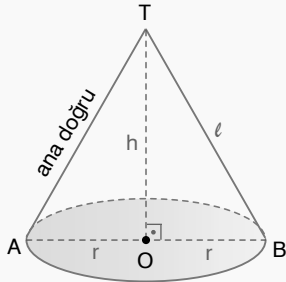
DİK DAİRESEL KONİ

Dik Dairesel Koni

Bir dairenin üzerindeki tüm noktaların daire dışındaki bir noktaya birleştirilmesiyle elde edilen cisimlere dairesel koni denir. Bu daireye koninin tabanı ve daire dışındaki noktaya da koninin tepe noktası denir.

Tepe noktasından tabana indirilen dikme taban dairesinin merkezinden geçiyor ise bu tür konilere de dik dairesel koni denir.

Tepe noktasından ve taban çemberi üzerindeki noktalardan geçen doğruya koninin ana doğruları denir.



Şekildeki dik dairesel konide;

$$[TO] \perp [AB]$$

$$\text{Yükseklik: } |TO| = h$$

$$\text{Taban yarıçapı:}$$

$$|AO| = |OB| = r$$

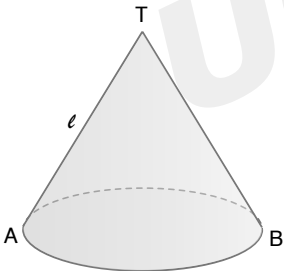
$$\text{Ana doğru parçasının uzunluğu:}$$

$$|TA| = |TB| = l$$

TAO veya TOB dik üçgeninde Pisagor bağıntısından;

$$h^2 + r^2 = l^2 \text{ yazılabilir.}$$

Örnek 1



Şekildeki dik dairesel koninin taban çevresi 12π birim ve yüksekliği 8 birimdir.

Buna göre, ana doğru parçasının uzunluğu (l) kaç birimdir?

Koninin Hacmi

Koninin hacmi, piramidin hacmi gibi bulunur. Yani, koninin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçte birine eşittir.

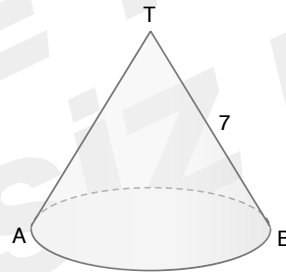
Tabanı daire olduğundan, taban alanı $= \pi r^2$ dir.

Taban yarıçapı r ve yüksekliği h olan bir koninin hacmi;

$$\text{Hacim} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} \text{ olur.}$$

Bir koni ile bir silindirin taban yarıçapları ve yükseklikleri eşit ise, koninin hacmi silindirin hacminin üçte birine eşit olur.

Örnek 2



Şekildeki dik dairesel koninin ana doğru parçasının uzunluğu 7 birim ve yüksekliği 5 birimdir.

Buna göre, koninin hacmi kaç birimküptür?

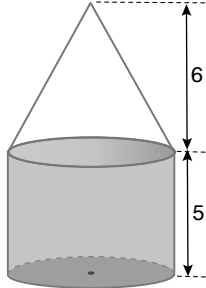
Örnek 3

Bir dik dairesel koninin taban yarıçapı 2 katına çıkarılıp yüksekliği yarıya indirilirse hacmi kaç katına çıkar?

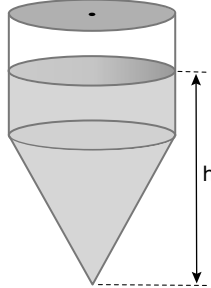


Dik Dairesel Koni

Örnek 4



Şekil 1



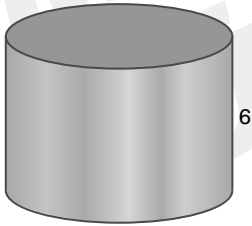
Şekil 2

Yukarıdaki şekilde, tabanları eş ve çakışık olan dik dairesel silindir ve dik dairesel koni biçimindeki iki bölümden oluşan bir birleşik kap verilmiştir. Silindirin yüksekliği 5 birim, koninin yüksekliği 6 birimdir.

Şekil 1'de silindir kısmı su ile doluyken, kap Şekil 2'deki gibi ters çevriliyor.

Buna göre, Şekil 2'deki su yüksekliği (h) kaç birimdir?

Örnek 5



Şekildeki dik dairesel silindir biçimindeki kütük yontularak dik dairesel koni haline getirilecektir.

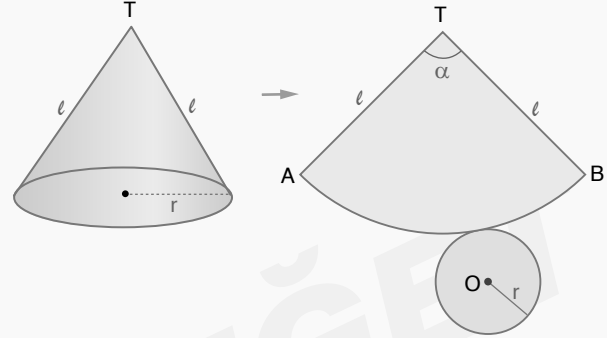
Silindirin taban yarıçapı 3 birim ve yüksekliği 6 birimdir.

Buna göre, elde edilecek olan koninin hacmi en fazla kaç birim-küp olabilir?

Koninin Açınımı ve Alanı

Dik dairesel koninin yanal yüzeyinin açınımı bir daire dilimidir.

Aşağıdaki şekilde; solda verilen kapalı haldeki dik dairesel koni açılırsa; sağda görüldüğü gibi, T merkezli ve ℓ yarıçaplı bir daire dilimi ile O merkezli ve r yarıçaplı taban daresi elde edilir.



Şekildeki AB yayının uzunluğu, koninin taban çevresine eşittir.

Ana doğru uzunluğu ℓ ve taban dairesinin yarıçapı r ise

TAB daire diliminin alanını $\frac{|\widehat{AB}| \cdot |TB|}{2}$ biçiminde yazarsak

$|\widehat{AB}| = 2\pi r$ olduğundan; $\frac{2\pi r \cdot \ell}{2}$ olur ve buradan

Koninin yanal alanı $= \pi \cdot r \cdot \ell$ olarak bulunur.

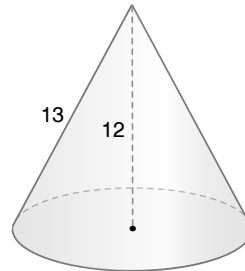
Koninin alanı, yanal alanı ile taban alanının toplamına eşittir.

Koninin alanı $= \pi \cdot r \cdot \ell + \pi \cdot r^2$ olur.

Daire diliminin merkez açısının ölçüsü α ise,

$|\widehat{AB}| = 2\pi r = \frac{2\pi \cdot \ell \cdot \alpha}{360^\circ} \Rightarrow \frac{r}{\ell} = \frac{\alpha}{360^\circ}$ bağıntısı elde edilir.

Örnek 6

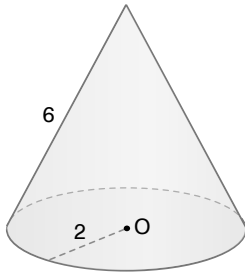


Şekildeki dik dairesel koninin yüksekliği 12 birim ve ana doğru parçasının uzunluğu 13 birimdir.

Buna göre, bu koninin alanı kaç birimkaredir?

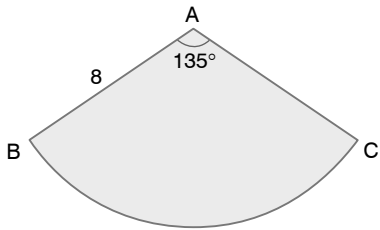
**Örnek 7**

Taban alanı 36π birimkare ve yanal alanı 48π birimkare olan bir dik dairesel koninin hacmi kaç birimküptür?

Örnek 8

Şekilde verilen dik dairesel koninin taban yarıçapı 2 birim ve ana doğru parçasının uzunluğu 6 birimdir.

Buna göre, bu koninin açınımda yanal yüzeyi oluşturan daire diliminin merkez açısının ölçüsü kaç derecedir?

Örnek 9

$$m(\widehat{BAC}) = 135^\circ$$

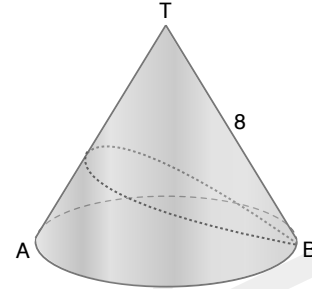
$$|AB| = 8 \text{ birim}$$

Şekilde verilen A merkezli daire dilimi, [AB] ile [AC] kenarları çakışacak biçimde kıvrılarak bir dik dairesel koni elde ediliyor.

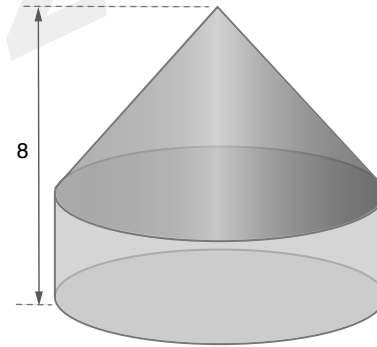
Buna göre, elde edilen koninin hacmi kaç birimküptür?

Örnek 10

Taban yarıçapı 2 birim ve ana doğru parçasının uzunluğu 8 birim olan dik dairesel koni biçimindeki bir cismin B köşesinde bulunan bir karınca, koninin yanal yüzeyi üzerinde yürüyerek koninin etrafını bir tur döndükten sonra B noktasına geri dönüyor.



Buna göre, karıncanın gittiği yolun uzunluğu en az kaç birimdir?

Örnek 11

Şekildeki cisim, taban yarıçapları 8 birim olan bir dik dairesel silindir ile bir dik dairesel koninin birleşiminden oluşmuştur.

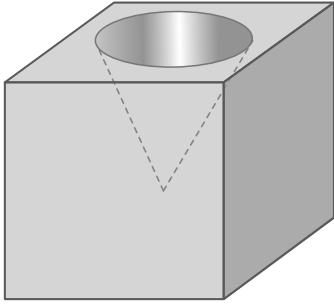
Koni ile silindirin hacimleri eşit ve yüksekliklerinin toplamı 8 birimdir.

Buna göre, cismin alanı kaç birimkaredir?



Dik Dairesel Koni

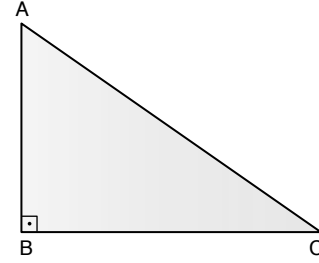
Örnek 12



Şekildeki küp biçimindeki tahtanın içinden dik dairesel koni biçimindeki bir parça kesilerek çıkarılmıştır.

Çıkarılan koninin taban yarıçapı 3 birim ve yüksekliği 4 birim ise, küpün alanı kesilmeden önceki durumuna göre kaç birimkare artmıştır? (Küpün bir ayrıntının uzunluğu 4 birimden fazladır.)

Örnek 13

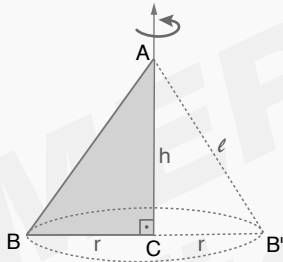


Şekildeki ABC dik üçgeni biçimindeki yüzeyin [AB] kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmi V_1 , [BC] kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmi V_2 dir.

$\tan(\widehat{ACB}) = \frac{2}{3}$ olduğuna göre, $\frac{V_1}{V_2}$ oranı kaçtır?

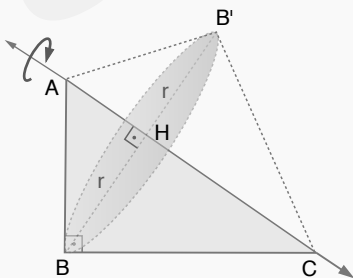
Dönel Koni

Dik üçgenin, bir dik kenarı etrafında 360° döndürülmesi ile bir dik dairesel koni elde edilir.



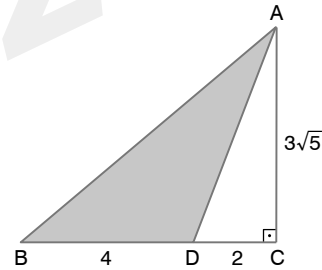
Şekildeki ABC dik üçgeninin; [AC] kenarı etrafında 360° döndürülmesi ile, taban yarıçapı |BC| ve yüksekliği |AC| olan dik dairesel koni oluşur.

Dik üçgenin, hipotenüsü etrafında 360° döndürülmesi ile tabanları ortak olan iki tane dik dairesel koni oluşur.



Şekildeki ABC dik üçgeninin; AC doğrusu etrafında 360° döndürülmesi ile, ortak taban yarıçapı [BH], yükseklikleri [AH] ve [CH] olan iki tane dik dairesel koni oluşur.

Örnek 14



Şekildeki santimetre türünden ölçüleri verilen ABC dik üçgeninde, boyalı bölge AC doğrusu etrafında 360° döndürülüyor.

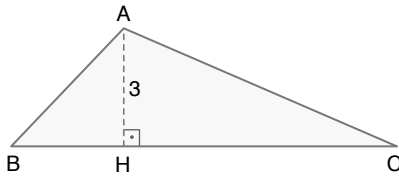
Buna göre, elde edilen cismin;

a. Alanı kaç cm^2 dir?

b. Hacmi kaç cm^3 tür?



Örnek 15



$$[AH] \perp [BC]$$

$$|AH| = 3 \text{ birim}$$

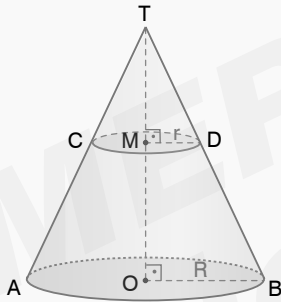
$$|BC| = 10 \text{ birim}$$

Şekildeki ABC üçgeninin, [BC] kenarı etrafında 360° döndürülmesiyle edilen cismin hacmi kaç birimküptür?

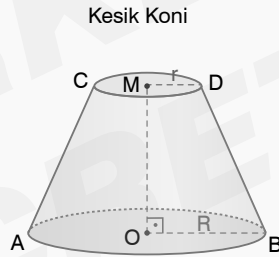
Kesik Koni

Bir koni; tabanına paralel bir düzlemle kesildiğinde, arakesit ile taban düzlemi arasında kalan cisme kesik koni denir.

Aşağıdaki Şekil 1'de verilen koninin; C ve D noktalarından geçen ve tabanına paralel olan düzlem boyunca kesilmesiyle Şekil 2'deki gibi kesik koni elde edilmiştir.



Şekil 1



Şekil 2

Şekil 1'de; (T,CD) ile (T,AB) konileri benzerdir.

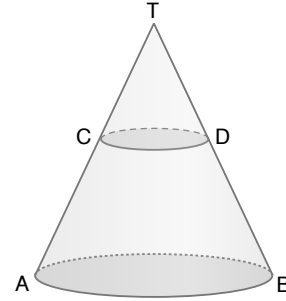
$$\text{Benzerlik oranı} = \frac{|TM|}{|TO|} = \frac{|TC|}{|TA|} = \frac{|TD|}{|TB|} = \frac{r}{R} \text{ olur.}$$

Benzer cisimlerin alanlarının oranı benzerlik oranının karesine, hacimlerinin oranı ise benzerlik oranının küpüne eşittir.

Kesik koni sorularında, kesik piramitlerde olduğu gibi; genellikle şekil tam bir koniye tamamlanarak benzerlik kullanılır.

Bir koni, tabana paralel düzlemlerle yükseklikleri eş parçalara ayrıldığında, tepe noktasından başlamak üzere elde edilen parçaların hacimleri; $V, 7V, 19V, 37V \dots$ biçiminde olur.

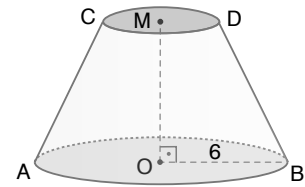
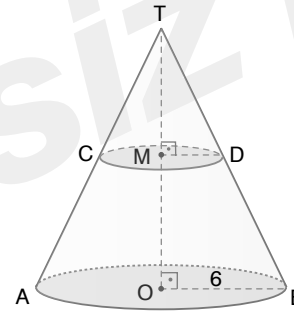
Örnek 16



Şekildeki (T,AB) konisi, C ve D noktalarından geçen ve tabanına paralel olan bir düzlem boyunca kesilerek iki parçaya ayrılıyor.

$3|TD| = 2|DB|$ olduğuna göre, elde edilen parçalardan küçük parçanın hacminin büyük parçanın hacmine oranı kaçtır?

Örnek 17



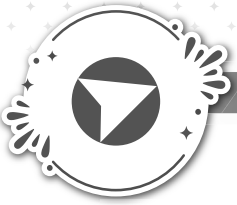
Soldaki şekilde verilen dik dairesel koni biçimindeki cisim, yüksekliğinin orta noktasından geçen ve tabanına paralel olan bir düzlem boyunca kesilerek sağdaki kesik koni elde edilmiştir.

Koninin taban yarıçapı 6 birim ve yüksekliği $6\sqrt{3}$ birimdir.

Buna göre, elde edilen kesik koninin,

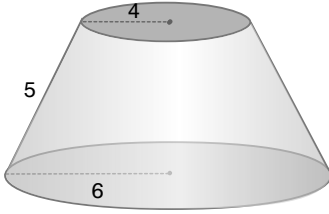
a. Alanı kaç birimkaredir?

b. Hacmi kaç birimküptür?



Dik Dairesel Koni

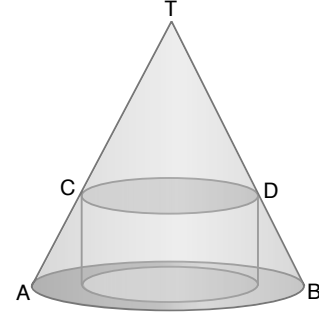
Örnek 18



Şekilde verilen kesik dik dairesel koninin tabanlarının yarıçapı 6 ve 4 birim, ana doğru parçasının uzunluğu 5 birimdir.

Buna göre, bu kesik koninin alanı kaç birimkaredir?

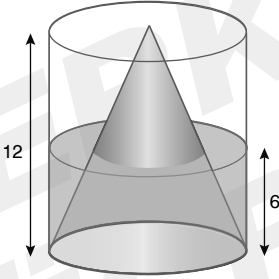
Örnek 20



Şekildeki dik dairesel koninin içine, tabanları çakışık olmak üzere bir dik dairesel silindir yerleştirilmiştir. Silindirin üst tabanı koninin yanal yüzeyine teğettir.

$|TD| = 2|DB|$ olduğuna göre, silindirin hacminin koninin hacmine oranı kaçtır?

Örnek 19



Dik dairesel silindir biçimindeki bir kabın içine şekildeki gibi bir dik dairesel koni yerleştirildikten sonra kabın içine 6 birim yüksekliğinde su doldurulmuştur.

Koninin ve silindirin her birinin yüksekliği 12 birim ve taban yarıçapları $2\sqrt{6}$ birimdir.

Buna göre, kaptaki suyun hacmi kaç birimküptür?

Örnek 21



Şekildeki kesik koni biçimindeki bardağın daire biçimindeki tabanının çapı 6 cm, üst kısmının çapı 12 cm, bardağın yüksekliği 16 cm ve içinde bulunan suyun yüksekliği 8 cm dir.

Buna göre, bu suyun hacmi kaç cm^3 tür?