

bölüm 1

GEOMETRİK ŞEKİLLER

ÜNİTE 3

Üçgende Açılar

H A T I R L A T M A

DOĞRUDA AÇILAR



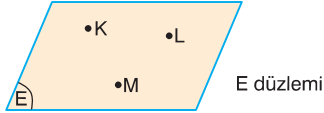
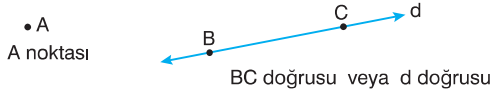
Temel Kabuller

Düzlem geometrisi (Öklid Geometrisi) nokta, doğru ve düzlem ile başlar.

Nokta düzlemde yer belirtir.

İki nokta bir doğru belirtir veya iki noktadan bir doğru geçer.

Doğrusal olmayan üç nokta bir düzlem belirtir.



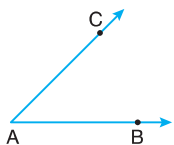
İşin: Doğrunun parçasıdır. Başlangıç noktası ve bir yönü vardır.



Açı: Başlangıç noktaları ortak olan iki ışının birleşimine açı denir.



Sembol ve Gösterimler



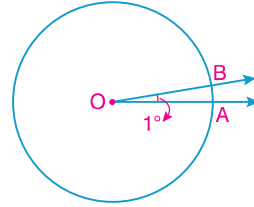
$[AB \cup [AC = \hat{BAC}$ dır.

BAC açısı; $\hat{BAC}$, $\hat{CAB}$ veya $\hat{A}$ olarak gösterilir.

A noktasına açının köşesi, [AB ve [AC ışınlarına da açının kenarları veya kolları denir.

Açının ölçüsü; $m(\hat{BAC})$, $m(\hat{CAB})$ veya $m(\hat{A})$ şeklinde gösterilir.

Açının Ölçüsü (Derece)

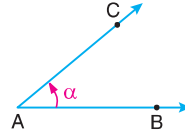


Bir çember yayının 360 eş parçasından birini gören merkez açının ölçüsüne 1° (derece) denir.

Şekildeki O merkezli çemberde $m(\hat{AOB}) = 1^\circ$ dir.

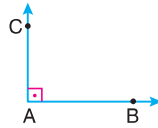
Açı Çeşitleri

a. Dar Açı



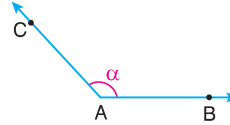
Ölçüsü 0° ile 90° arasında olan açılardır.

b. Dik Açı



Ölçüsü 90° olan açıdır.

c. Geniş Açı



Ölçüsü 90° ile 180° arasında olan açılardır.

d. Doğru Açı



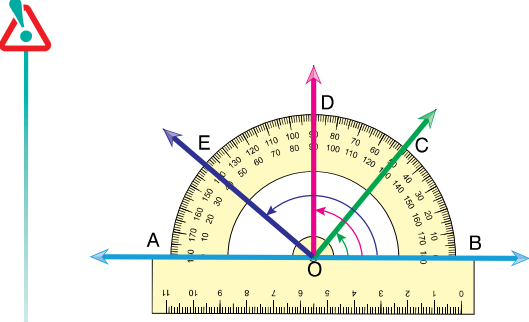
Ölçüsü 180° olan açıdır.

e. Tam Açı



Ölçüsü 360° olan açıdır.

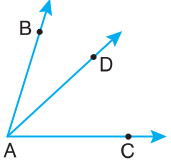




Şekildeki açı ölçerde;

$m(\widehat{BOC}) = 50^\circ$ dar açı, $m(\widehat{BOD}) = 90^\circ$ dik açı,

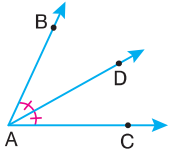
$m(\widehat{BOE}) = 140^\circ$ geniş açı ve $m(\widehat{BOA}) = 180^\circ$ doğru açıdır.



Komşu Açılar: Birer kenarları ortak olan açılardır.

$\widehat{BAD}$ ile $\widehat{DAC}$ açıları komşu açıdır.

[AD ışını ortak kenardır.



Açıortay: Bir açıyı iki eşit parçaya ayıran ışına **açıortay** denir.

Şekilde [AD, BAC açısının açıortayı ise,

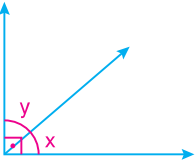
$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{CAD})$ dir.



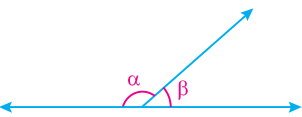
Zenginleştirme

Ölçüleri toplamı 90° olan iki açıya **tümler açılar** denir.

Ölçüleri toplamı 180° olan iki açıya **bütünler açılar** denir.

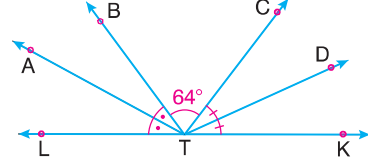


Şekildeki x ve y açıları tümlerdir.



Şekildeki α ve β açıları bütünlerdir.

Örnek : 1



Şekilde L, T, K doğrusal olduğuna göre,

ATD açısının kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm :

Örnek : 2



Tümler iki açının ölçüleri oranı $\frac{7}{11}$ olduğuna göre, bu açılardan küçük olanının bütünlerinin kaç derece olduğunu bulalım.

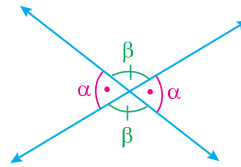
Çözüm :

M
e
r
k
e
z
e

T
e
ğ
e
t

Kesişen İki Doğrunun Oluşturduğu Açılar

Ters Açılar

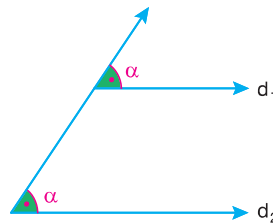


İki doğrunun kesişmesiyle ters açılar oluşur.

Ters açılarının ölçüleri birbirine eşittir.

Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar

1. Yöndeş Açılar



Şekilde, $d_1 \parallel d_2$ olmak üzere,

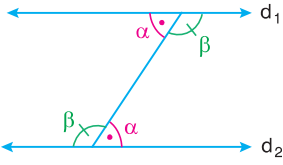
α ile belirtilen açılar **yöndeş** açılardır.

Yöndeş açılarının ölçüleri eşittir.





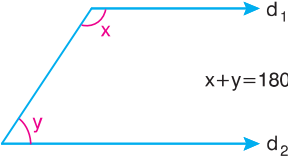
2. İç Ters Açılar



Şekilde, $d_1 \parallel d_2$ olmak üzere,
 α açıları **iç ters** açılarıdır ve ölçüleri eşittir.

Aynı şekilde β açıları iç ters açılarıdır ve ölçüleri eşittir.

3. Karşı Durumlu Açılar

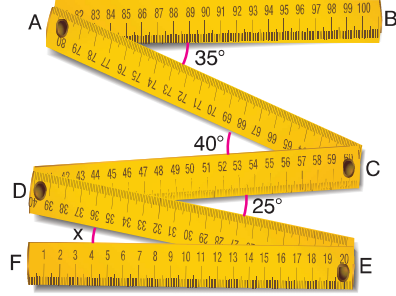


$$x + y = 180^\circ$$

Şekilde $d_1 \parallel d_2$ olmak üzere,
ölçüsü x ve y olan açılar **karşı durumlu açılar** dır.

Karşı durumlu açılarda ölçülerinin toplamı **180°** dir.

Örnek : 3



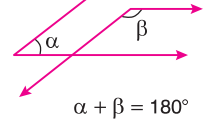
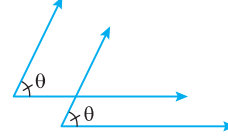
Şekildeki cetvelde $AB \parallel FE$ olduğuna göre, x açısının kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm :



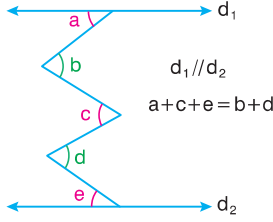
Zenginleştirme

Karşılıklı olarak iki kolu paralel olan açılar durumlarına göre eş veya bütünler açılarıdır.



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

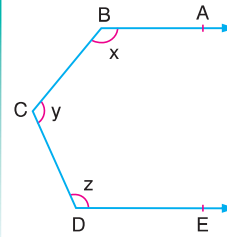
Merkeze
Teğet



Paralel doğrular arasında şekildaki gibi kırılmalar olduğu durumda, bir tarafa bakan açılarda toplamı diğer tarafa bakan açılarda toplamına eşittir.

Buna zik-zak kuralı da diyebiliriz.

Her kırılmada açının yönünün değiştiğine dikkat ediniz.



Paralel iki doğru arasında tek kırılmanın olduğu durumda oluşan üç açının ölçülerinin toplamı 360° dir.

Kırılma noktasından bir paralel doğru çizerek bunu ispatlayabiliriz.

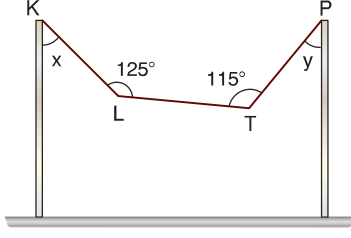
Şekilde; $[BA \parallel [DE$ olmak üzere, $x + y + z = 360^\circ$ olur.



Doğru açı sorularının çözümünde kırılma noktalarından paraleller çizip açı çeşitlerini kullanabiliriz.



Örnek 4



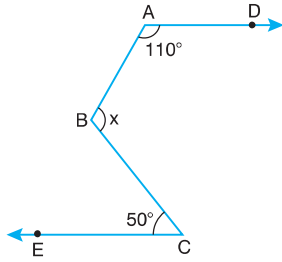
Şekilde iki direk arasına çekilmiş bir ip görülmektedir.

Bu ipin L ve T noktasına konan iki kuş nedeniyle ip aşağı doğru inince 125° ve 115° lik iki açı oluşmuştur.

Buna göre, $x + y$ toplamının kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

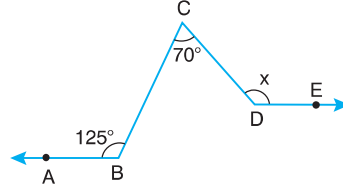
Örnek 5



[AD // [CE ise x açısının ölçüsünü bulalım.

Çözüm

Örnek 6



[BA // [DE ise x açısının ölçüsünü bulalım.

Çözüm

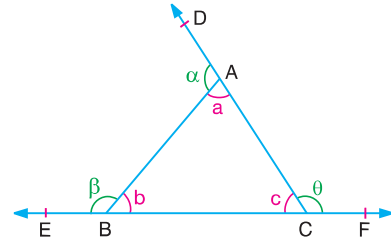
ÜÇGENDE AÇILAR

Üçgenin İç ve Dış Açıları



M
e
r
k
e
z
e

T
e
ğ
e
t



$\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ ve $\widehat{ACB}$ açıları üçgenin iç açılarıdır.

Üçgende iç açıların toplamı 180° dir.

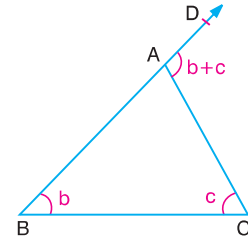
$$a + b + c = 180^\circ$$

İç açıların komşu ve bütünleri olan açılara üçgenin **dış açıları** denir.

Üçgende dış açıların toplamı 360° dir.

$$\alpha + \beta + \theta = 360^\circ$$

Aynı köşedeki iç açı ile dış açının ölçüleri toplamı 180° dir.



Üçgende bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçülerine eşittir.

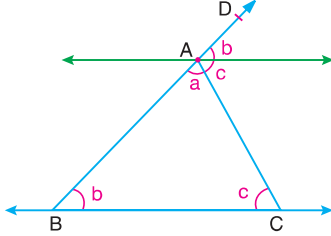
$$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{C}) \text{ olur.}$$





Destekleme

Düzlemde bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnızca bir paralel doğru çizilebilir.



Şekildeki ABC üçgeninin bulunduğu düzlemde, BC doğrusuna paralel ve A noktasından geçen doğruyu çizelim.

- İç ters (c) ve yondeş (b) açılarının eşliğinden, b ve c açılarının ölçüleri toplamı A köşesindeki dış açıya eşit olur.
- A noktasındaki doğru açıdan, $a + b + c = 180^\circ$ olduğu görülür.

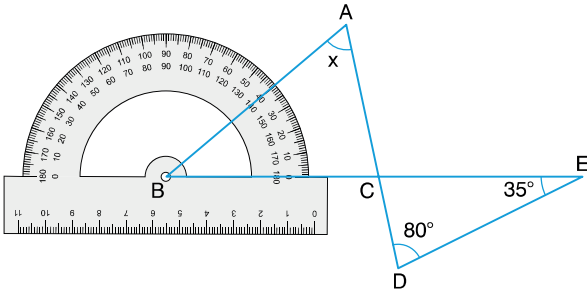


Tüm iç açıları dar açı olan üçgene **dar açılı üçgen** denir.

Bir açısı 90° olan üçgene **dik üçgen** denir.

Bir açısı geniş açı olan üçgene **geniş açılı üçgen** denir.

Örnek 7

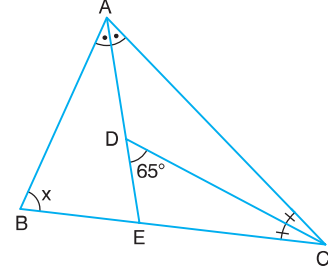


Şekildeki açı ölçerin merkezi, ABC üçgeninin B köşesine yerleştirilmiştir. [AD] ve [BE] doğru parçaları C noktasında kesişmektedir.

Buna göre, x açısının kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm

Örnek 8



ABC bir üçgen, AE ve CD açıortay,

$$m(\widehat{EDC}) = 65^\circ, m(\widehat{ABC}) = x$$

Yukarıdaki verilere göre, x kaç derecedir?

- A) 50 B) 45 C) 40 D) 35 E) 30

(ÖSYM Sorusu)

Çözüm



M
e
r
k
e
z
e

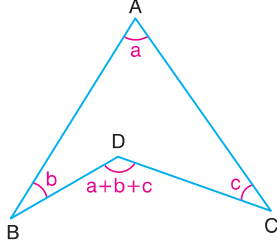
T
e
ğ
e
t

ETKİNLİK 1

Aşağıdaki cümlelerde verilen boşlukları uygun kelimelerle doldurunuz.

- Tümleri 75° olan açının bütünlüğü dir.
- İç açıların ölçüleri 2, 3 ve 4 ile orantılı olan bir üçgenin en büyük dış açısının ölçüsü dir.
- Bir dik üçgenin en büyük dış açısının ölçüsü 140° ise en büyük dar açısının ölçüsü dir.
- Ölçüsü 180° olan açığa açı denir.
- İki paralel doğru bir kesenle kesildiğinde oluşan karşı durumlu açılardan 180° dir.
- İç açıların ölçüsü birer tam sayı olan geniş açılı bir üçgenin bir dar açısının ölçüsü 36° ise diğer dar açının ölçüsü en fazla olabilir.
- İki iç açısının ölçüleri toplamının aritmetik ortalaması A köşesindeki iç açının ölçüsüne eşit olan ABC üçgeninin A açısının ölçüsü dir.

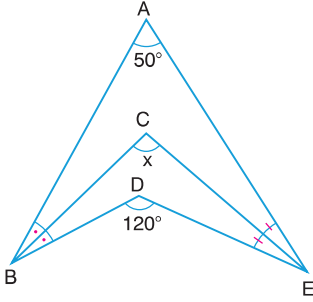




ABDC içbükey dörtgeninde, BDC açısının ölçüsü, iç açılarının ölçüleri toplamına eşittir.

Şekle göre; $m(\widehat{BDC}) = a + b + c$ olur.

Örnek 9



Şekilde [BC] ve [EC] açıortay olduğuna göre,

x açısının kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



M
e
r
k
e
z
e

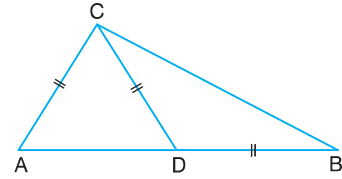
T
e
ğ
e
t



Üçgende açı sorularının çözümünde en çok kullandığımız kurallar;

- iç açılar toplamı,
- iki iç açının toplamının bir dış açıya eşitliği ve
- ikizkenar üçgenin taban açılarının eşitliğidir.

Örnek 11

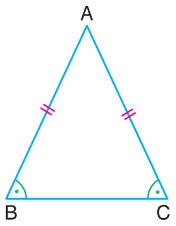


$m(\widehat{ACB}) = 105^\circ$ ise B açısının ölçüsünü bulalım.

Çözüm



İkizkenar Üçgen



Taban açıları birbirine eşittir.

$|AB| = |AC|$ ise

$\widehat{A}$ tepe açısı, $\widehat{B}$ ile $\widehat{C}$ taban açıları ve

$m(\widehat{B}) = m(\widehat{C})$ dir.

İki açısının ölçüsü eşit olan bir üçgen, ikizkenardır.

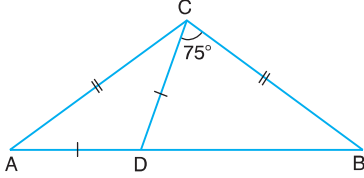
İkizkenar üçgenin herhangi bir açısı 60° ise eşkenar üçgen olur.





İkizkenar üçgenin taban açıları belli değilse aynı harflerle harflendirelim.

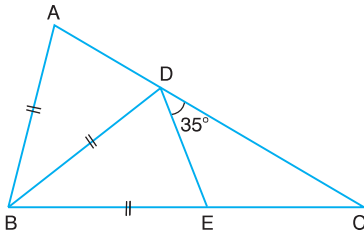
Örnek 12



A açısının ölçüsünü bulalım.

Çözüm

Örnek 13

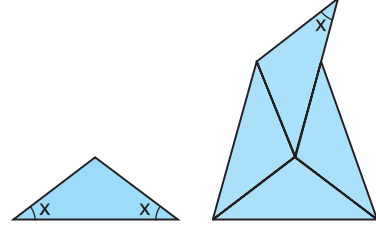


$m(\widehat{ABC})$ açısının ölçüsünü bulalım.

Çözüm

Örnek 14

Amblem tasarlayan Hande, Şekil 1'deki ikizkenar üçgen biçimindeki kartondan dört tanesini bir masa üzerinde aralarında boşluk bırakmadan birleştirerek her birinin tamamen görüldüğü Şekil 2'deki deseni elde ediyor.



Şekil 1

Şekil 2

Buna göre, x açısının ölçüsü kaç derecedir?

- A) 15 B) 20 C) 30 D) 36 E) 48

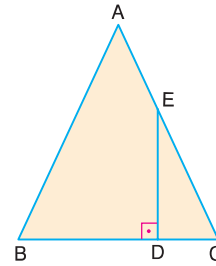
(ÖSYM Sorusu)

Çözüm

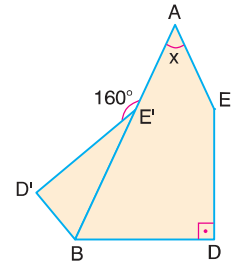


M
e
r
k
e
z
e
T
e
ğ
e
t

Örnek 15



Şekil 1



Şekil 2

Şekil 1'deki ABC ikizkenar üçgeni biçimindeki kâğıt [ED] boyunca kesiliyor ve oluşan dik üçgen parça Şekil 2'deki gibi büyük parçaya yapıştırılıyor.

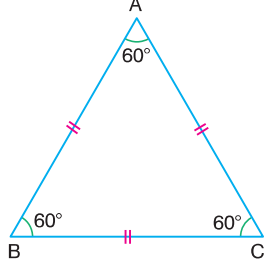
$|AB| = |AC|$ ve $m(\widehat{AE'D'}) = 160^\circ$ olduğuna göre, x açısının ölçüsünü bulalım.

Çözüm



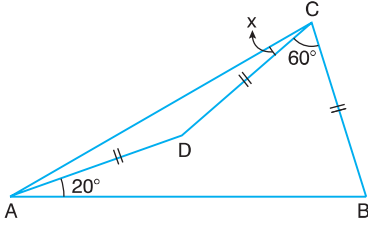


Eşkenar Üçgen



Eşkenar üçgenin üç kenarının uzunluğu birbirine eşit ve iç açılarının her birinin ölçüsü 60° dir.

Örnek 16



ABC bir üçgen, $|AD| = |CD| = |BC|$,
 $m(\widehat{BAD}) = 20^\circ$, $m(\widehat{BCD}) = 60^\circ$, $m(\widehat{ACD}) = x$

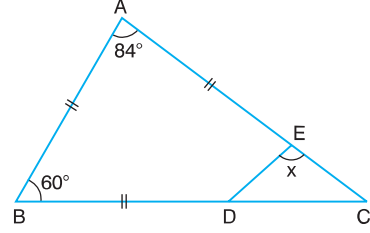
Buna göre, x kaç derecedir?

- A) 5 B) 10 C) 15 D) 20 E) 25

(ÖSYM Sorusu)

Çözüm

Örnek 17



Şekildeki ABC üçgeninde verilenlere göre, x açısının ölçüsünü bulalım.

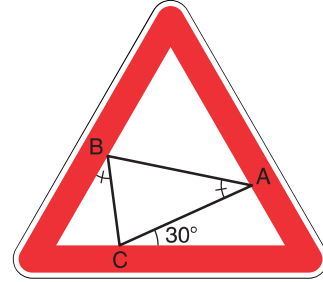
Çözüm



M
e
r
k
e
z
e

T
e
ğ
e
t

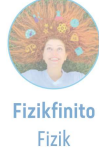
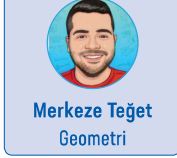
Örnek 18



Şekildeki eşkenar üçgen biçimindeki trafik levhasında $|AB| = |AC|$ olduğuna göre, BAC açısının kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm





bölüm 2

GEOMETRİK ŞEKİLLER

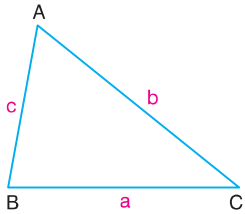
ÜNİTE 3

Üçgende Açı Kenar İlişkileri

ÜÇGENDE AÇI KENAR İLİŞKİLERİ

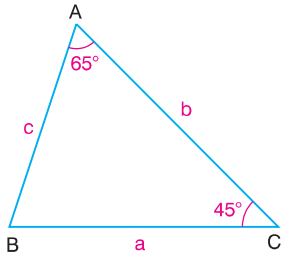
Üçgende Açı ve Kenar Arasındaki İlişki

Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar, küçük açı karşısında küçük kenar bulunur.



ABC üçgeninde,
 $m(\hat{C}) < m(\hat{A}) < m(\hat{B})$ ise
 $c < a < b$ olur.

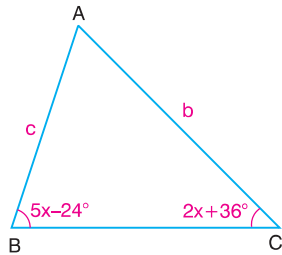
Örnek 1



Şekildeki verilere göre,
ABC üçgeninin kenarları arasındaki sıralamayı bulalım.

Çözüm

Örnek 2



Şekildeki ABC üçgeninde $c < b$ olduğuna göre, x'in en küçük tam sayı değerinin kaç derece olduğunu bulalım.

Çözüm



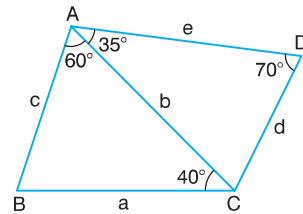
Destekleme

Bir dik üçgende en uzun kenar, 90° 'nin karşısındaki hipotenüstür.
Geniş açılı bir üçgende en uzun kenar, geniş açının karşısındaki kenardır.



Soruda birden fazla üçgen verilip en uzun veya en kısa kenar sorulduğunda, tüm üçgenlere ayrı ayrı bakılır.

Örnek 3

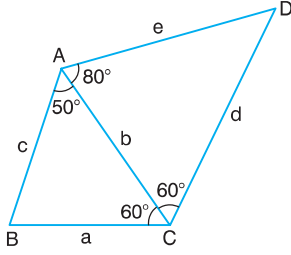


Şekildeki en uzun kenarı bulalım.

Çözüm



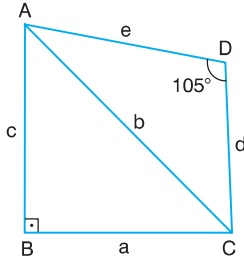
Örnek 4



Şekildeki en kısa kenarı bulalım.

Çözüm

Örnek 5



Şekildeki en uzun kenarı bulalım.

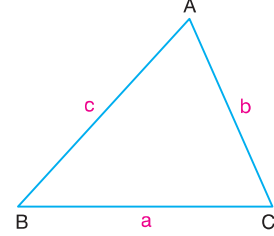
Çözüm



Temel Kabuller

Bir üçgende herhangi bir kenarın uzunluğu, diğer iki kenarın uzunlukları toplamından küçük, farkından büyüktür.

Buna **üçgen eşitsizliği** denir.



$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c \text{ ve}$$

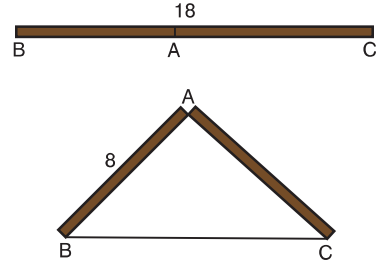
$$|a - b| < c < a + b \text{ olur.}$$

Örnek 6



M
e
r
k
e
z
e

T
e
ğ
e
t

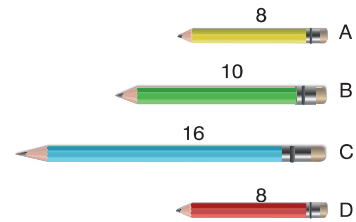


Şekildeki 18 cm uzunluğundaki çubuk A noktasından kırılarak iki parçaya ayrılıyor.

ABC bir üçgen ve $|AB| = 8$ cm olduğuna göre, B ve C noktaları arasındaki uzaklığın alabileceği değer aralığını bulalım.

Çözüm

Örnek 7



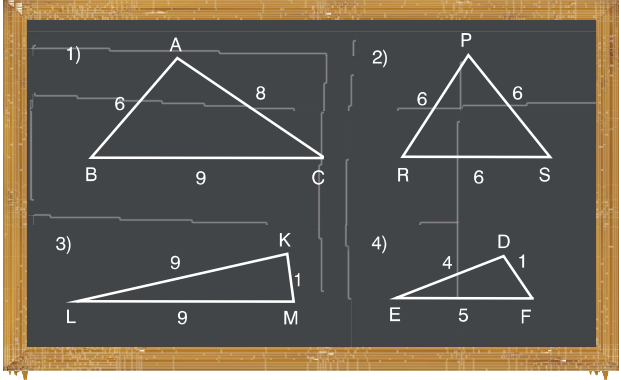
Yukarıda uzunlukları verilen kalemler uç uca eklenerek üçgenler elde edilecektir.

Hangi kalemlerle üçgen elde edilip edilemeyeceğini bulalım.



Çözüm

Örnek 8

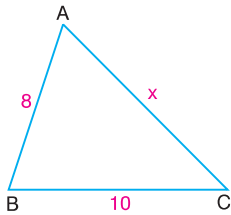


Matematik öğretmeni Sinem Hanım, üçgende açı kenar bağıntıları dersinin sonunda tahtaya 4 tane üçgen çizmiş ve hangilerinin üçgen olup olmadığını sormuştur.

Buna göre, öğretmenin sorduğu sorunun cevabını bulalım.

Çözüm

Örnek 9



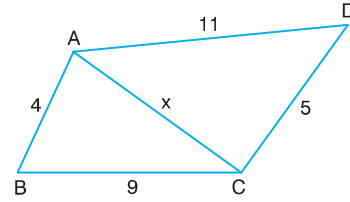
Şekildeki ABC üçgeninde, $m(\hat{C}) < m(\hat{B})$ ise x 'in alabileceği değer aralığını bulalım.

Çözüm



Eğer sorulan uzunluk birden fazla üçgenin kenarı ise üçgenlerin hepsinde üçgen eşitsizliği yazılıp ortak değerlendirilir.

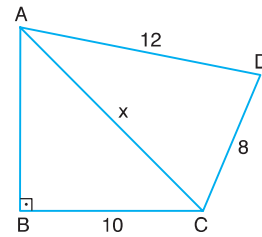
Örnek 10



Şekilde; x 'in alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm

Örnek 11



Şekilde; x 'in alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerinin farkını bulalım.

Çözüm

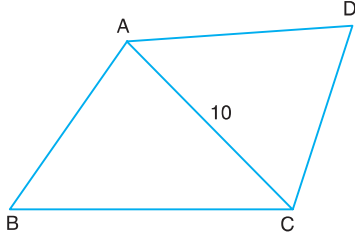


Merkeze

Teğet



Örnek 12



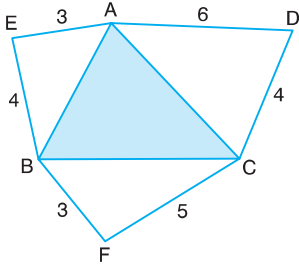
Şekildeki ABCD dörtgeninin çevresinin alabileceği en küçük tam sayı değerini bulalım.

Çözüm



Açı kenar bağıntıları sorularında, kenarların tam sayı verilip verilmediğine dikkat etmek gerekir.

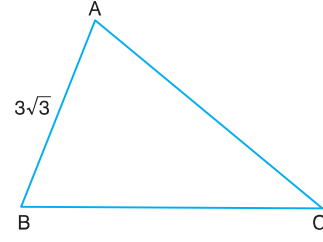
Örnek 13



Şekildeki ABC üçgeninin çevresinin alabileceği en küçük ve en büyük tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm

Örnek 14



Şekilde [AB] kenarının uzunluğu $3\sqrt{3}$ birim olan ABC üçgeninin diğer kenar uzunlukları birer tam sayıdır.

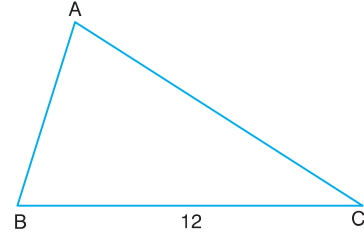
$m(\hat{B}) > m(\hat{C})$ olduğuna göre, $|AC| + |BC|$ toplamının alabileceği en küçük değeri bulalım.

Çözüm



M
e
r
k
e
z
e
T
e
ğ
e
t

Örnek 15



Şekilde, [BC] kenarının uzunluğu 12 birim olan ABC üçgeni verilmiştir.

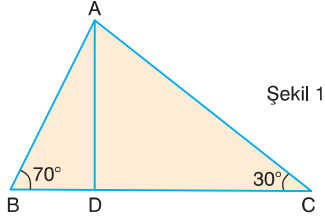
$|AC| = 2|AB|$ olduğuna göre, Çevre(ABC)'nin alabileceği en büyük ve en küçük tam sayı değerlerini bulalım.

Çözüm

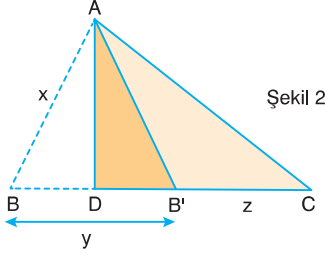




Örnek 16



Şekil 1



Şekil 2

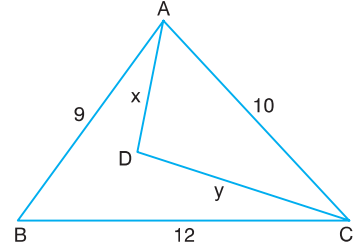
Şekil 1'de verilen ABC üçgeni biçimindeki kâğıdın B ve C köşelerindeki iç açılarının ölçüleri sırasıyla 70° ve 30° dir.

Bu kâğıt [AD] boyunca katlandığında B köşesi [BC] üzerindeki B' noktasına geliyor.

Buna göre, $|AB| = x$, $|BB'| = y$ ve $|B'C| = z$ arasındaki sıralamayı bulalım.

Çözüm

Örnek 17

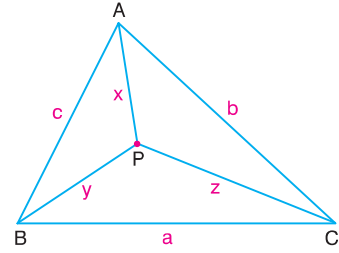


D, ABC üçgeninin içerisinde bir nokta olduğuna göre, $x + y$ toplamının alabileceği değer aralığını bulalım.

Çözüm



Zenginleştirme



Bir üçgenin iç bölgesinde alınan bir noktanın üçgenin köşelerine olan uzaklıkları toplamı üçgenin çevresinden küçük, çevresinin yarısından büyüktür.

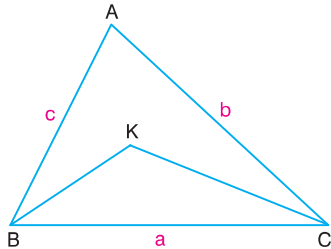
$$\text{Çevre}(ABC) = a + b + c$$

ABP, APC ve PBC üçgenlerinde üçgen eşitsizliğini yazıp tarafa toplarsak,

$$\frac{\text{Çevre}(ABC)}{2} < x + y + z < \text{Çevre}(ABC) \text{ bulunur.}$$



Zenginleştirme



K, ABC üçgeninin iç bölgesinde bir nokta olmak üzere,
 $a < |KB| + |KC| < b + c$ olur.

Örnek 18

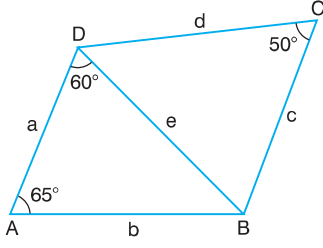
Çevresi 24 birim olan bir üçgenin iç bölgesinde alınan bir P noktasının üçgenin köşelerine olan uzaklıkları toplamı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

- A) 9 B) 11 C) 12 D) 16 E) 26

Çözüm



Örnek 19



$$m(\widehat{BDA}) = 60^\circ, m(\widehat{DAB}) = 65^\circ, m(\widehat{BCD}) = 50^\circ$$

Yukarıdaki şekilde $AD \parallel BC$ 'dir.

Buna göre, a, b, c, d ve e ile belirtilen kenarlardan en uzununu hangisidir?

- A) a B) b C) c D) d E) e

(ÖSYM Sorusu)

Çözüm

E T K İ N L İ K 2

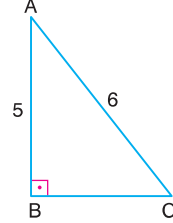
Aşağıda verilen bilgiler doğru ise (D) yanlış ise (Y) yazınız.

1. ☐ Bir üçgende büyük açı karşısında büyük kenar, küçük açı karşısında küçük kenar bulunur.
2. ☐ İç açıları birer tam sayı olan geniş açılı ikizkenar üçgenin bir dar açısı en çok 44° olabilir.
3. ☐ Kenar uzunlukları 5, 8 ve 3 birim olan bir üçgen oluşturulabilir.
4. ☐ Kenarları tam sayı ve çevresi 9 birim olan bir üçgenin bir kenarı en çok 4 birim olabilir.
5. ☐ Kenarları birbirinden farklı tam sayılar ve çevresi 11 birim olan bir üçgenin bir kenarı en az 1 birim olabilir.
6. ☐ Geniş açılı bir üçgenin iki kenarı 4 birim ve 7 birim ise üçüncü kenarı en az 4 birim olabilir.
7. ☐ Dik kenarları 5 ve 8 birim; A köşesi 90° olan ABC dik üçgeninin içinde alınan bir noktanın B ve C köşelerine uzaklıkları toplamı tam sayı olarak en az 9 birim olabilir.

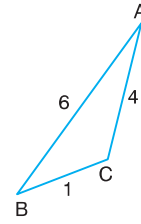
E T K İ N L İ K 3

Aşağıdaki şekiller verilen ölçülere uygun olarak çizildiğinde üçgen oluşturulabiliyorsa şeklin yanına **üçgen**, aksi durumda şeklin yanına **değil** yazınız.

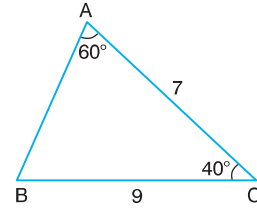
1. ☐



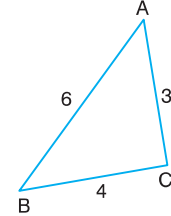
2. ☐



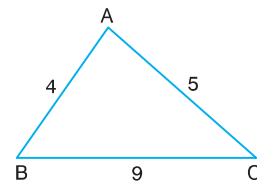
3. ☐



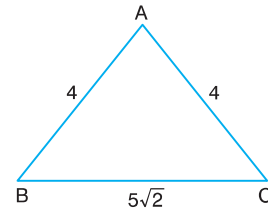
4. ☐



5. ☐



6. ☐



Merkeze

Teget

